

e を用いた成長率の計算

橋 永久

(最新の改訂：2015.4.23)

e の定義。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1)$$

数学関連の話になると、いきなり訳のわからないものが出てきて嫌になることがあります。この e の定義も、これだけ出されるとたまりません。¹ しかし、この数には経済学に関わる重要な意味があります。もう一つ訳のわからない概念、極限 $\lim$ と併せて、ここで復習しておきましょう。

年率 100% の高利で、1 円預けたケースを考えてみます。この 1 円は 1 年後に

$$(1 + 1) = 2$$

になります。これは複利計算を、一年間で一回だけやったケースです。少し利払いの条件を良くして、複利計算を年 2 回やってみましょう。つまり半年ごと、一年間に 2 回、利子を元本 1 円に組み入れてやるのです。

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

利子にも利子を付ける複利の回数を増やした事により、年末の値が 0.25 円も高くなりました。もっと条件を良くして毎月利子を元本に組み入れてやると

$$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035\dots$$

となります。さらに年末の値が上がっています。毎日複利計算してやったらどうでしょうか？

$$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714567\dots$$

年末の値は上がっていますが、年一回から半年ごとの年二回の複利にした時の上がり方より、上がり方は小さくなっています。ここで思い切って毎時間複利計算してあげましょう。年間 $365 \times 24 = 8760$ 回、利子を元本に組み入れてやることになります。

$$\left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2.718127\dots$$

さらに年末の値の上がり方は、小さくなりました。もう面倒です。毎分複利してみましょう。

$$\left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} = 2.718279\dots$$

¹ e は、ネイピア数 (Napier's number) と呼ばれる無理数です。

さらに毎秒・ $\frac{1}{10}$ 秒ごとの複利を計算してみると、年末の値はそれぞれ 2.718281785...、2.718281824... と、殆ど変わらなくなります。² 極限 $\lim$ と言うと難しく感じますが、 n の値を限りなく大きくしてやる、ということにすぎません。この例では、瞬間瞬間複利してやるということです。年末の受取額の上がり方がだんだん小さくなってきたことから分かるように、 n の値を限りなく大きくしてやると、受取額 e 円はある値に落ち着きます。数学では、こうした現象を収束と名づけています。

結局 e という当初訳の分からなかった数は、次のように解釈する事ができます。「年初 1 円の元本に、年率 100% の利子率で瞬間瞬間の複利支払いを行った場合、最初の 1 円は一年後に e 円 (= 2.718281828459045...) になっている。」³

経済学でよく行われるのは、この e を用いて、いろいろな期間における経済成長率を表そうということです。ある金額のお金が運用され、生み出された利子がさらに次の利子を生む、という状況（複利計算）と、あるビジネスが新しいビジネスを生み、その新ビジネスがさらに別のビジネスを誘発する、という状況（経済成長）が対応するのは、直観的に理解できると思います。なぜ瞬間瞬間の成長で考えた方が良いのかは後回しにして、以下では成長率の計算方法を示しておきます。考察する最初の年の実質 GDP を Y_t 、最後の年の実質 GDP を Y_T とし、 $T - t = \tau$ 年間の年成長率を計算します。一年ごとに成長したと考えると（これが年複利に対応します）、

$$Y_T = Y_t \times (1 + g)^\tau$$

となります。ここで g が求めたい成長率です。上記の複利の例に対応させ、成長率 g を適用する期間をどんどん短くしていく事を考えます。適用期間を n とすると、

$$Y_T = Y_t \times \left(1 + \frac{g}{n}\right)^{\tau \times n}$$

と表せます。適用する期間をどんどん短くするという事は、 n を限りなく大きくしていく、すなわち極限を考えるということになります。

$$Y_T = Y_t \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{g}{n}\right)^{\tau \times n}$$

両辺を Y_t で割り、変形していきます。

$$\frac{Y_T}{Y_t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{g}{n}\right)^{\tau \times n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{g}}\right)^{\left(\frac{n}{g}\right) \times g \times \tau} \quad (2)$$

ここで数式を見やすくするために

$$\frac{n}{g} \equiv m$$

² 毎秒・ $\frac{1}{10}$ 秒になると数値がとて大きくなり、計算時にパソコンのメモリをかなり消費します。Excel 等では、計算の精度も怪しくなってきます。毎秒・ $\frac{1}{10}$ 秒に関しては、Mathematica というソフトを用いて計算しました。ミリ秒での計算は、16G のメモリを搭載している私のパソコンでは無理でした。

³ 年率 100% の利子率で瞬間瞬間の複利計算する、ということの意味が良く分からないかもしれません。半年複利の時 $(1 + \frac{1}{2})^2$ 、一日複利の時、 $(1 + \frac{1}{365})^{365}$ となっている事から分かるように、100% という利子率（分子）は同じでも、その利子率が適用される期間（分母）がどんどん短くなっている、ということです。

と置き換えます。 $n \rightarrow \infty$ なら $m \rightarrow \infty$ となることは、左辺の分子が大きくなる事から分かると思います。この置換により (2) 式は、

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m \times g \times \tau} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{g \times \tau}$$

と書き換えられます。 m は大括弧の内にしか入っていませんから、 m を大きくしていく、すなわち極限を取ることは、大括弧の内だけで考えれば良くなります。

$$= \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{g \times \tau} = e^{g \times \tau}$$

最後の変形は、このレジメの最初に出てきた式、(1) 式の n を m に代えればすぐ分かると思います。結局

$$\frac{Y_T}{Y_t} = e^{g \times \tau} \quad (3)$$

となります。このままでは、まだ成長率 g が直接計算できないので、(3) の両辺の対数を取ってみましょう。対数の底としては e を使います。底 e の対数を特に自然対数と呼びます。 $\log$ ではなく、 $\ln$ で表すことが多いのでその表記法に従います。

$$\log_e \left(\frac{Y_T}{Y_t}\right) = \log_e e^{g \times \tau} = g \times \tau \times \log_e e$$

$\log_e e = 1$ ですから

$$\ln \left(\frac{Y_T}{Y_t}\right) = g \times \tau$$

g は

$$g = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{Y_T}{Y_t}\right) = \frac{1}{\tau} [\ln Y_T - \ln Y_t] \quad (4)$$

で計算できます。

最後に、なぜ瞬間瞬間の成長を考えた方が良いのかをもう一度考えてみましょう。例で考えます。経済成長を、千葉駅前の店舗数で測れるとしましょう。ある年の年初 100 店だった店舗数が、年末に 140 店になったとします。店舗の増加は、既存の店が支店を出す事によるとします。一年間の店舗数の成長率を 40% とすると、年初に存在した 100 店だけが支店を出した、と考える事になります。しかし一年の間に、ある店が支店を出し、その支店がまた支店を出すこともありえます。この場合、 $e^{g \times 1} = \frac{140}{100}$ で計算される $g \simeq 33.65\%$ が、より正確な成長率ということになります。

この“より正確”の意味は、二年間の成長率を考え、それを一年ごとに分割することでさらに明らかになります。2003 年年頭に 100 店だった店舗数が、2004 年年頭に 120 店、2005 年年頭に 140 店になったとします。連続でなく、年単位で 2 年間の成長を考えると、年成長率は

$$100 \times (1 + g)^2 = 140$$

で計算でき、 $g = 0.183216\dots$ となります。一年ごとに同様の計算をすると、2003 年の年成長率は 0.2、2004 年のそれは 0.16666.... となります。この両者の平均が 2003-2005 年にかけての年成長率に対応すると考えられますが、それは、0.183333... となり、2 年まとめて計算した場合の $g = 0.183216\dots$ とズレています。たった 2 年間の成長率の計算で、すでにズレが生じているのです。一方連続で考えると、年成長率は

$$g = \frac{1}{2} \times [\ln 140 - \ln 100] = 0.168236\dots$$

となります。皆さん、1 年毎の成長率を自然対数を用いて計算し、その平均を取ってみてください。その値は、0.168236... となるはずです。