

最大値原理 (The Maximum Principle)

2006 年 11 月 24 日

(2006 年 12 月 5 日 改訂)

担当：橘 永久

1 導入

このプリントでは動学最適化問題の解法の一つである、最大値原理 (The Maximum Principle) を説明します。ハミルトン関数 (Hamiltonian) を用いることから、ハミルトニア
ンとよく略称されている手法です。“原理”といわれると難解な数学的手法のように思わ
れますが、講義で説明したラグランジアン (Lagrangian) による解法と本質的に同じもので
す。ラグランジアンによる解法を、簡潔な公式にしたものだと考えてください。

下記の説明は、主に Dixit (1990, Ch.10) によっています。日本語では脇田 (1998, Ch.2)、
西村 (1990, Ch.3) が、分かりやすい説明を示しています。もう少し高度な内容まで理解し
たい方は、Kamien and Schwartz (1991) に取り組まれると良いと思います。

講義で取り上げた Ramsey モデルに沿って説明します。

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (1)$$

$$\text{s.t. } (1 + n)k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + f(k_t) - c_t, \quad (t = 0, \dots, \infty) \quad (2)$$

$$k_0 = \bar{k}_0 \quad (\text{given}) \quad (3)$$

講義と同様に、この最大化問題のラグランジアンを考えます。講義の設定と異なる点が二点あります。まず遷移式 (2) を、以下のように書き換えます。

$$k_{t+1} = \frac{f(k_t)}{1 + n} + \frac{1 - \delta}{1 + n} k_t - \frac{c_t}{1 + n} \quad (4)$$

単に両辺を $(1 + n)$ で割っただけです。この作業の意味は後ほど説明しますが、基本的には t 期の投資

$$k_{t+1} - k_t = \frac{f(k_t)}{1 + n} - \frac{\delta + n}{1 + n} k_t - \frac{c_t}{1 + n} \quad (5)$$

を考えたいのだという事を記憶に留めておいてください。もう一つの変更点は、ラグランジアンを書き下ろした後で説明します。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + \cdots + \beta^t u(c_t) + \beta^{t+1} u(c_{t+1}) + \cdots \\
& + \mu_1 \left[\frac{f(k_0)}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_0 - \frac{c_0}{1+n} - k_1 \right] \\
& + \mu_2 \left[\frac{f(k_1)}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_1 - \frac{c_1}{1+n} - k_2 \right] \\
& + \mu_3 \left[\frac{f(k_2)}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_2 - \frac{c_2}{1+n} - k_3 \right] \\
& \vdots \\
& + \mu_t \left[\frac{f(k_{t-1})}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_{t-1} - \frac{c_{t-1}}{1+n} \right] \\
& + \mu_{t+1} \left[\frac{f(k_t)}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_t - \frac{c_t}{1+n} - k_{t+1} \right] \\
& + \mu_{t+2} \left[\frac{f(k_{t+1})}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_{t+1} - \frac{c_{t+1}}{1+n} - k_{t+2} \right] \\
& \vdots
\end{aligned}$$

お気づきのように、2 番目の変更点というのは、ラグランジュ乗数に関してです。講義の $\beta^t \lambda_t$ が、 μ_t に換えられています。ラグランジュ乗数の意味を思い出してください。 λ_t は、 t 期の投資の帰属価格 (又は shadow price) を t 期での価値として表したものです。言い換えると、トンや金額で表される投資を、 t 期の効用単位での価値に変換するものです。最大化問題を解く時期 ($t = 0$) で評価するためには、 β^t で割り引く必要があります。一方、 $\mu_t (= \beta^t \lambda_t)$ は、 t 期の投資の帰属価格を 0 期で評価して表したものです。表記上簡単なので、最初に μ_t を用いて説明します。最大値原理では、 μ_t を用いる場合が現在価値ハミルトニアン (present value Hamiltonian) に、 λ_t を用いる場合が当該期価値ハミルトニア

ン (current value Hamiltonian) に対応します。実際の論文でよく使われているのは、解釈が簡単な current value Hamiltonian です。

まずは、講義の時と同様にこのラグランジアンから最大化のための必要条件（一階の条件）を導出しておきましょう。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \frac{1}{1+n} \mu_{t+1} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\mu_{t+1} + \mu_{t+2} \left[\frac{f'(k_{t+1})}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} \right] = 0, \quad (7)$$

$$k_{t+1} = \frac{f(k_t)}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} k_t - \frac{c_t}{1+n} \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t k_t = 0. \quad (9)$$

μ_t と λ_t の違いにさえ気をつければ、講義で導出したものと同一です（当然！）。

2 ハミルトニアンを導入

基本的には、ラグランジアンを書き換えていくだけです。まずは、(5) 式を用いて、下記のように書き換えます。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + \cdots + \beta^t u(c_t) + \beta^{t+1} u(c_{t+1}) + \cdots \\
& + \mu_1 \left[\frac{f(k_0)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_0 - \frac{c_0}{1+n} \right] + \mu_1 k_0 - \mu_1 k_1 \\
& + \mu_2 \left[\frac{f(k_1)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_1 - \frac{c_1}{1+n} \right] + \mu_2 k_1 - \mu_2 k_2 \\
& + \mu_3 \left[\frac{f(k_2)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_2 - \frac{c_2}{1+n} \right] + \mu_3 k_2 - \mu_3 k_3 \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& + \mu_t \left[\frac{f(k_{t-1})}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_{t-1} - \frac{c_{t-1}}{1+n} \right] + \mu_t k_{t-1} - \mu_t k_t \\
& + \mu_{t+1} \left[\frac{f(k_t)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_t - \frac{c_t}{1+n} \right] + \mu_{t+1} k_t - \mu_{t+1} k_{t+1} \\
& + \mu_{t+2} \left[\frac{f(k_{t+1})}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_{t+1} - \frac{c_{t+1}}{1+n} \right] + \mu_{t+2} k_{t+1} - \mu_{t+2} k_{t+2} \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

改めて、大括弧の中身が投資 $k_{t+1} - k_t$ であることに留意してください。

更に、以下のように書き換えます。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \mu_1 k_0 + u(c_0) + \mu_1 \left[\frac{f(k_0)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_0 - \frac{c_0}{1+n} \right] \\
& + [\mu_2 - \mu_1] k_1 + \beta u(c_1) + \mu_2 \left[\frac{f(k_1)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_1 - \frac{c_1}{1+n} \right] \\
& + [\mu_3 - \mu_2] k_2 + \beta^2 u(c_2) + \mu_3 \left[\frac{f(k_2)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_2 - \frac{c_2}{1+n} \right] \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& + [\mu_{t+1} - \mu_t] k_t + \beta^t u(c_t) + \mu_{t+1} \left[\frac{f(k_t)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_t - \frac{c_t}{1+n} \right] \\
& + [\mu_{t+2} - \mu_{t+1}] k_{t+1} + \beta^{t+1} u(c_{t+1}) + \mu_{t+2} \left[\frac{f(k_{t+1})}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_{t+1} - \frac{c_{t+1}}{1+n} \right] \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

ようやくハミルトニアンにたどり着きました。ハミルトン関数 (Hamiltonian) を次のように定義します。正確には、現在価値ハミルトニアン (present value Hamiltonian) です。意味は最後に考えます。

$$H_t = \beta^t u(c_t) + \mu_{t+1} \left[\frac{f(k_t)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_t - \frac{c_t}{1+n} \right] \quad (10)$$

ハミルトニアンは、上記ラグランジアン各行の後半部分を取りあげたものだけということに、お気づきと思います。説明には $t+1$ 期のものも使いますから、混乱しないように明示しておきましょう。

$$H_{t+1} = \beta^{t+1} u(c_{t+1}) + \mu_{t+2} \left[\frac{f(k_{t+1})}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n} k_{t+1} - \frac{c_{t+1}}{1+n} \right] \quad (11)$$

ハミルトニアンを用いると、最大化の必要条件 (6) を以下のように表すことができます。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \frac{\partial H_t}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \frac{1}{1+n} \lambda_{t+1} = 0, \quad (12)$$

次に最大化のための必要条件 (7) は、以下のように表せます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} &= -\lambda_{t+1} + \lambda_{t+2} \left[\frac{f'(k_{t+1})}{1+n} + \frac{1-\delta}{1+n} \right] = 0. \\ \iff \\ \lambda_{t+2} - \lambda_{t+1} &= -\frac{\partial H_{t+1}}{\partial k_{t+1}} \end{aligned} \quad (13)$$

できれば一つのハミルトニアンで考えたいので、通常は一期ずらして

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial k_t} \quad (14)$$

を考えます。

3 ハミルトニアンを用いた解法

いままでの煩雑な書き換えを、次のようにまとめることが出来ます。Ramsey モデルは、ハミルトニアンを用いて以下のように解くことが出来ます。確認のため、再度、最大化問

題を明示しておきます。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.t.} \quad & (1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t, \quad (t = 0, \dots, \infty) \\ & k_0 = \bar{k}_0 \quad (\text{given}) \end{aligned}$$

まず、遷移式を、左辺が状態変数 (ここでは k_t) の純粋な差分になるように変形します。

$$k_{t+1} - k_t = \frac{f(k_t)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n}k_t - \frac{c_t}{1+n} \quad (15)$$

次に、目的関数の t 期の部分、 $\beta^t u(c_t)$ のみを取り出します。ラグランジュ乗数の表記を決め (ここでは μ)、それに差分で表記した遷移式の右辺を掛けます。両者を足し合わせ、ハミルトニアンを定義します。正確には、現在価値ハミルトニアンです。

$$H_t = \beta^t u(c_t) + \mu_{t+1} \left[\frac{f(k_t)}{1+n} - \frac{\delta+n}{1+n}k_t - \frac{c_t}{1+n} \right]$$

ハミルトニアン H_t を t 期の操作変数 (control variable、ここでは c_t) と状態変数 (state variable、ここでは k_t) で微分し、以下のように置いてやれば、最大化のための一階条件を得ることができます。

$$\frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0, \quad (16)$$

$$\mu_{t+1} - \mu_t = - \frac{\partial H_t}{\partial k_t} \quad (17)$$

この二条件に加えて、遷移式 (15) と横断性条件 (9) が必要なのは、言うまでもありません。

4 一般に・・・

一般に、動学問題を、以下のように解くことができます。表記は、Dixit (1990, p.146) のものを用いました。

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(y_t, z_t, t) \quad (18)$$

$$\text{s.t. } y_{t+1} - y_t = Q(y_t, z_t, t) \quad (19)$$

$$y_0 = \bar{y}_0 \quad (\text{given}) \quad (20)$$

ここで、 $F(\cdot)$ が目的関数、 $Q(\cdot)$ が遷移式、 y が状態変数、 z が操作変数を表します。

こうした問題に出会ったら、まず t 期のハミルトニアンを定義し

$$H_t = \beta^t F(y_t, z_t, t) + \mu_{t+1} Q(y_t, z_t, t)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial z_t} = 0, \quad (21)$$

$$\mu_{t+1} - \mu_t = -\frac{\partial H_t}{\partial y_t} \quad (22)$$

を計算します。この二条件に、遷移式 (19) と横断性条件を加えたものが、最大化のための一階条件です。

当該期ハミルトニアンへの変換、連続時間での表記、ハミルトニアンダイナミックスの

意味の3点は、参考文献で勉強してください。

5 ハミルトニアンの意味

動学問題の解法としては、変分法 (Calculus of VARIations) や動的計画法 (Dynamic Programming) もあります。しかし、一部の理論一辺倒のマクロ経済学者を別にすると、一般的に経済学者はハミルトニアンによる解法を好みます。ハミルトニアンには、直観的な経済学的意味があるからです。

Ramsey モデルのハミルトニアンを例に考えて見ます。

$$H_t = \beta^t u(c_t) + \mu_{t+1} \left[\frac{f(k_t)}{1+n} - \frac{\delta + n}{1+n} k_t - \frac{c_t}{1+n} \right]$$

右辺第一項は、効用で計った t 期の消費 $u(c_t)$ の現在価値 $\beta^t u(c_t)$ です。一方、第二項の大括弧の中身は、 t 期の投資 $(k_{t+1} - k_t)$ を表しています。それに μ_t 、つまり t 期の投資の帰属価格を0期での効用価値に変換するものを掛けています。つまり第二項は、効用で計った t 期の投資の現在価値です。まとめると、ハミルトニアンは効用単位の消費プラス投資 $(C + I)$ 、より大雑把に言ってしまうと、国民所得を表しています。

ハミルトニアンを用いた一階の条件 (16) は、国民所得を最大化するように消費を選択する、と解釈できます。ここでの国民所得（ハミルトニアン）には、消費（操作変数）の増減が、将来の資本財（状態変数）蓄積、ひいては将来の生産量をどのように変えていくかの効果が、投資の帰属価格（ラグランジアン）を通じて既に取り込まれています。

一階の条件 (17) は、資本財が増えたとき、その（帰属）価格がどのように減少するかを表

していると解釈できます。Dixit (1990, pp.150-151) は、少し書き換えることにより、もっと面白い解釈が出来ることを示しています。

$$\mu_{t+1} - \mu_t - \frac{\partial H_t}{\partial k_t} = 0. \quad (23)$$

第1項の $\mu_{t+1} - \mu_t$ は、資本財価格の変動によるキャピタルゲインを表していると考えられます。一方、第2項 $\frac{\partial H_t}{\partial k_t}$ は、資本の増加が生産を通じてどれだけ国民所得を増やすかを示していると言えます。資本の増加に伴う利益は、基本的に企業の所有者に配当として分配されます。つまり、第2項は配当収入です。大雑把に解釈すれば、(23) の左辺は、資本をもう一単位余分に持つことから生じる追加の総利益を表しています。既に最適な選択をしていれば、もう一単位資本所有を増やすことからの追加利益はゼロ、つまり一階の条件 (17) は、no-arbitrage condition と考えられます。

いろいろな最大化問題のハミルトニアン解釈に挑戦してみてください。当たり前のことですが、必ず直観的な説明が出来るはずです。

参考文献

- Dixit, Avinash K. (1990) *Optimization in Economic Theory*, Oxford: Oxford University Press, 2nd edition.
- Kamien, Morton I. and Nancy L. Schwartz (1991) *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, New York: Elsevier Science Publishing Co., 2nd edition.
- 西村清彦 (1990) 『経済学のための最適化理論入門』, 東京大学出版会, 東京.

脇田成 (1998) 『マクロ経済学のパースペクティブ』, 日本経済新聞社, 東京.